



EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Paulo Cupertino de Lima

(EDITORAufmg)

© 2009, Paulo Cupertino de Lima

© 2009, Editora UFMG

Este livro ou parte dele não pode ser reproduzido por qualquer meio sem autorização escrita do Editor.

L732c Lima, Paulo Cupertino
Cálculo de várias variáveis / Paulo Cupertino de Lima. – Belo Horizonte :
Editora UFMG, 2009.

105 p. : il. (Educação a Distância)

Inclui referências.

ISBN: 978-85-7041-795-4

1. Cálculo. 2. Variáveis (Matemática). I. Título. II. Série.

CDD: 515.9

CDU: 517.97

Elaborada pela DITTI – Setor de Tratamento da Informação
Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu o apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC.

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE TEXTOS DE MATEMÁTICA Dan Avritzer

EDITORIAÇÃO DE TEXTOS Maria do Carmo Leite Ribeiro

REVISÃO DE PROVAS Alexandre Vasconcelos de Melo

PROJETO GRÁFICO Eduardo Ferreira

FORMATAÇÃO E CAPA Sérgio Luz

PRODUÇÃO GRÁFICA Warren Marillac

EDITORA UFMG

Av. Antônio Carlos, 6.627 - Ala direita da Biblioteca Central - Térreo
Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4650 - Fax: + 55 31 3409-4768
www.editora.ufmg.br - editora@ufmg.br

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

Av. Antônio Carlos, 6.627 - Reitoria - 6º andar
Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4054 - Fax: + 55 31 3409-4060
www.ufmg.br - info@prograd.ufmg.br - educacaoadistancia@ufmg.br

Sumário

Apresentação	9
Aula 1 - Retas, planos, cilindros e superfícies quádricas	11
1.1 Equações da reta	11
1.2 Equações do plano	12
1.3 Cilindros	13
1.4 Superfícies quádricas	13
1.4.1 Cônicas	14
1.4.2 Exemplos de superfícies quádricas	16
Aula 2 - Funções de várias variáveis	25
2.1 Domínio, imagem e gráfico de uma função de duas variáveis	25
2.2 Curvas de nível	27
Aula 3 - Limite e continuidade	33
3.1 Algumas definições	33
3.2 Limite	34
3.3 Continuidade	43
Aula 4 - Derivadas parciais	49
4.1 Revisão do conceito de derivada para função de uma variável	49
4.2 Definição de derivadas parciais e as suas propriedades	50
4.3 A interpretação geométrica das derivadas parciais	53
4.4 Derivadas parciais de ordens superiores	54
4.5 Derivadas parciais de funções mais de duas variáveis	56
Aula 5 - Diferenciabilidade de funções de várias variáveis	59
5.1 Revisão do conceito de diferenciabilidade para função de uma variável	59
5.2 Diferenciabilidade para função de duas variáveis	60
5.3 O plano tangente e a reta normal à superfície que é o gráfico de $z = f(x, y)$	61
5.4 Incrementos e diferenciais	64
5.5 Diferenciabilidade para função de mais de duas variáveis	65

Aula 6 - A Regra da Cadeia e a derivada direcional	67
6.1 A Regra da Cadeia	67
6.1.1 Revisão da Regra da Cadeia para funções de uma variável	67
6.1.2 A Regra da Cadeia para funções de duas variáveis	68
6.1.3 O caso em que $z = f(x, y)$, com $x = g(t)$ e $y = h(t)$	68
6.1.4 O caso em que $z = f(u, v)$, onde $u = g(x, y)$ e $v = h(x, y)$	72
6.2 Derivação implícita	76
6.3 Plano tangente à superfície $F(x, y, z) = 0$	77
6.4 A derivada direcional	78
6.5 A interpretação geométrica do gradiente de uma função	80
6.6 O gradiente e curvas de nível	81
Aula 7 - Máximos e mínimos de funções de duas ou mais variáveis	85
7.1 Algumas definições	85
7.2 Aplicações	94
Aula 8 - Máximos e mínimos com vínculos: multiplicadores de Lagrange	97
Referências	103
Sobre o autor	105