

Universidade Federal de Minas Gerais
Educação a Distância
2012

Lições de Cálculo Integral em Várias Variáveis

Dan Avritzer
Mário Jorge Dias Carneiro



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Prof^o Clélio Campolina Diniz

Reitor

Prof^a Rocksane de Carvalho Norton

Vice-Reitoria

Prof^a Antônia Vitória Soares Aranha

Pró-Reitora de Graduação

Prof^o André Luiz dos Santos Cabral

Pró-Reitor Adjunto de Graduação

CENTRO DE APOIO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA

Prof^o Fernando Selmar Rocha Fidalgo

Diretor de Educação a Distância

Prof^o Wagner José Corradi Barbosa

Coordenador da UAB/UFMG

Prof^o Hormindo Pereira de Souza Junior

Coordenador Adjunto da UAB/UFMG

EDITORA CAED-UFMG

Prof^o Fernando Selmar Rocha Fidalgo

CONSELHO EDITORIAL

Prof^a. Ângela Imaculada Loureiro de Freitas Dalben

Prof^o. Dan Avritzer

Prof^a. Eliane Novato Silva

Prof^o. Hormindo Pereira de Souza

Prof^a. Paulina Maria Maia Barbosa

Prof^a. Simone de Fátima Barbosa Tófani

Prof^a. Vilma Lúcia Macagnan Carvalho

Prof^o. Vito Modesto de Bellis

Prof^o. Wagner José Corradi Barbosa

COLEÇÃO EAD – MATEMÁTICA

Coordenador: Dan Avritzer

LIVRO: Lições de Cálculo Integral em Várias Variáveis

Autores: Dan Avritzer e Mário Jorge Dias Carneiro

Revisão: Jussara Maria Frizzera

Projeto Gráfico: Laboratório de Arte e Tecnologia
para Educação/EBA/UFMG

Formatação: Sérgio Luz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca da Escola de Belas Artes da UFMG, MG, Brasil)

Este livro recebeu apoio financeiro da UAB/CAPES.

SUMÁRIO

Apresentação	7
Nota do Editor	9
Aula 1 - Integral Dupla	11
1.1 Introdução	11
1.2 Integral Iterada	12
1.2.1 Integral Iterada em regiões mais gerais	14
1.3 Integral dupla em retângulos	14
1.4 A integral dupla em regiões mais gerais	17
1.4.1 Propriedades da Integral Dupla	19
1.5 Mudança na ordem de Integração	20
1.6 Exercícios	22
Aula 2 - Mudança de variáveis e aplicações da integral dupla	25
2.1 Mudança de variáveis em integral dupla	25
2.1.1 O determinante como área	26
2.1.2 Integral dupla em Coordenadas Polares	27
2.1.3 Fórmula da mudança de variáveis em Integral dupla	29
2.2 Aplicações da Integral Dupla	31
2.2.1 Área de figuras planas	31
2.2.2 Volume de sólidos limitados por gráficos de funções	31
2.2.3 Massa de placas planas	33
2.2.4 Área de superfícies parametrizadas	33
2.3 Exercícios	40
Aula 3 - Integral tripla	43
3.1 Integral Tripla em um bloco retangular e o Teorema de Fubini	43
3.2 Coordenadas cilíndricas	47
3.3 Coordenadas esféricas	49
3.4 Exercícios	52
Aula 4 - Integral Curvilínea	55
4.1 Introdução	55
4.2 Curvas regulares	56
4.3 Integral Curvilínea de uma função escalar	58
4.4 Campo de vetores	61
4.5 Integral Curvilínea de um campo vetorial	58
4.6 Teorema de Green	67
4.7 Campos Conservativos no Plano	71
4.8 Exercícios	74

Aula 5 - Teorema de Stokes	77
5.1 Integral de superfície de funções escalares	77
5.1 Integral de superfície de campos vetoriais	78
5.3 Teorema de Stokes	80
5.4 Campos conservativos no espaço	85
5.5 Exercícios	88
Aula 6 - Teorema da Divergência (Gauss)	91
6.1 Divergência de um campo	91
6.2 Teorema da Divergência de Gauss	92
6.3 Teorema da Divergência de Gauss em regiões mais gerais	95
6.4 Exercícios	97
Referências Bibliográficas	99