

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

LEONARDO MENDES BARBOSA FILHO

**AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO E
APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**

TAIOBEIRAS

2016

LEONARDO MENDES BARBOSA FILHO

**AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS COMO METODOLOGIA DE
ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado para obtenção do Diploma
de Graduação em Licenciatura em
Matemática, à Universidade Federal dos
Vales do Jequitinhonha e Mucuri

TAIOBEIRAS

2016

AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Nome do aluno(a)¹: Leonardo Mendes Barbosa Filho
Nome do orientador(a)²: Profa. Dra. Adriana Assis Ferreira
Nome do co-orientador(a)³: Alessandro Caldeira Alves

Resumo: O objetivo desse trabalho foi investigar se as investigações matemáticas como metodologia dariam mais significado ao processo de ensino e aprendizagem em sala de aula. Para tanto foi implementada a atividade investigativa “Explorações Investigativas com Potências e Regularidades” em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Manoel Pedro Silva, situada na região rural de Nova Matrona (MG). A partir da vivência com a implementação foi possível identificar o trabalho com atividades de investigação em sala de aula como uma metodologia com grande potencialidade de tornar o aluno mais autônomo, reflexivo e capaz de encontrar suas próprias soluções para diferentes situações matemáticas. Durante a implementação da atividade foi possível verificar momentos em que os alunos se dedicaram a criar conjecturas, discutir as mesmas em grupo, levantar novas questões e testá-las. Tais ações, no entanto, pelo fato de os alunos não estarem habituados com atividades de investigação exigiram grande intervenção do professor-pesquisador fazendo-se necessário que o mesmo levantasse questões para fomentar discussões e motivar os alunos a buscarem suas próprias respostas dentro de cada grupo. Como conclusão, constatou-se que a prática investigativa é, pois, capaz de proporcionar um processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico em sala de aula com destaque para a evolução dos alunos no que diz respeito a uma nova maneira de se posicionar diante de uma atividade.

Palavras-Chave: Investigações Matemáticas. Potências e regularidades. Prática reflexiva.

1 Introdução

Aprender Matemática nunca foi fácil para muitos alunos, mas será que a disciplina apresenta uma complexidade elevada a ponto de se tornar uma grande barreira no processo de ensino e aprendizagem ou será que é necessário, na busca de um processo de ensino e aprendizagem mais eficaz, uma prática reflexiva por parte do professor que conseqüentemente o levará a uma prática diferenciada?

¹ Aluno(a) do Curso de Matemática – UFVJM Polo de Apoio Presencial – Taiobeiras E-mail: : leonardo.mendes1004@hotmail.com

² Orientador(a) da Pesquisa – Diretoria de Educação Aberta e a Distância – EAD/UFVJM E-mail: aassisferreira@gmail.

³ Co-orientador(a) da Pesquisa – Diretoria de Educação Aberta e a Distância – EAD/UFVJM E-mail: caldeirak@yahoo.com.br.

Reflexões como essas nos levam a buscar novas metodologias para o ensino e aprendizagem da Matemática escolar. Algumas tendências metodológicas que compõem o campo de estudo da Educação Matemática atualmente são: Etnomatemática, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas, História da Matemática, Investigação Matemática e Resolução de Problemas (DAVID, 1995; ZORZAN, 2007).

A revisão de algumas tendências relacionadas à educação matemática, mais precisamente relacionadas ao ensinar-aprender, faz-se necessário para que seja possível identificar concepções que fundamentam e perpassam o processo do ensino-aprendizagem dos sujeitos para consigo mesmos, para com os outros e para com o conhecimento (ZORZAN, 2007, p.78).

Dentre as abordagens metodológicas mencionadas chamaram-nos a atenção as investigações matemáticas em sala de aula. Isso porque, essa metodologia permite que os alunos 'façam Matemática' já que o trabalho de investigação está ligado a quatro momentos principais: formulação de uma situação que possa intrigar os alunos e para a qual os mesmos não encontram resposta imediata; elaboração de questões; formulação de conjecturas, avaliações (realizações de testes), argumentações, demonstrações; e uma apresentação sucinta do trabalho realizado (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2003).

O trabalho investigativo busca ampliar o currículo escolar e fomentar cada vez mais discussões e aspectos relevantes do ensino e aprendizagem da Matemática. Sendo assim, o processo de investigação é uma forma de fazer com que o aluno desenvolva sua aprendizagem de maneira significativa e, segundo Veloso et al (1999), seja possível:

Criar um contexto de aula propício ao diálogo, onde o professor lança boas questões para trabalho prático com informações mínimas e onde, após alguma discussão, os alunos partem para formas de trabalho de tipo exploratório, formulação de problemas, investigações ou pequenos projetos que o professor acompanha e incentiva, assumindo em momento posterior a coordenação da sistematização do trabalho desenvolvido e/ou da formalização de aspectos matemáticos inerentes aquele trabalho, constitui um bom exemplo de aula(s) de trabalho investigativo e uma referência de currículo implementado a ter em conta (VELOSO et al, 1999, p. 7).

Considerando as investigações matemáticas como metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática, várias questões se apresentam: Qual a visão do docente frente às novas tendências metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática, particularmente as investigações matemáticas? O professor se sente preparado para

trabalhar com essa metodologia de ensino? Como o aluno se comporta diante da proposta de um trabalho investigativo? O processo de ensino e aprendizagem se torna mais significativo quando se implementa, em sala de aula, atividades de investigação matemática?

Este trabalho, ainda que numa abordagem exploratória, centrando-se nos alunos, pretende verificar se o trabalho com atividades investigativas oportuniza o desenvolvimento do pensamento reflexivo dos mesmos e, conseqüentemente, propicia uma aprendizagem mais significativa e promove uma nova visão da disciplina Matemática.

Para tanto foi implementada uma atividade de investigação matemática em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Manoel Pedro Silva, situada na região rural de Nova Matrona (MG).

2 Marco Teórico

2.1 Investigações matemáticas na sala de aula

As atividades investigativas se caracterizam por, sobretudo “procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos” (PONTE, 2003, p.2).

A prática de investigações matemáticas tem a potencialidade de estimular o aluno no desenvolvimento de sua autonomia e busca pela construção de conhecimento. Através desta, o aluno estará imerso em uma prática capaz de desenvolver a sua capacidade de argumentação/socialização sobre as atividades matemáticas, sendo uma atividade que irá proporcionar uma visão mais profunda do conteúdo. Isso porque, segundo Lamonato e Passos:

Uma tarefa de caráter exploratório-investigativo comumente não traz em seu enunciado uma questão a responder, mas apresenta uma situação aberta que permite a quem se propõe realizá-la fazer explorações, propor questões, buscar respostas, levantar e testar conjeturas, justificar, registrar, argumentar e socializar os resultados obtidos (LAMONATO e PASSOS, 2009 p. 99).

Investigação é um processo na qual procuramos conhecer o objeto/conteúdo em estudo, tirar conclusões, opinar, levantar conjeturas, encontrar soluções para os diferentes tipos de atividades e principalmente socializar com o grupo. Investigar é uma

ferramenta muito propícia para um momento de busca pela aprendizagem significativa e pela argumentação matemática, da busca pela pesquisa e um caráter de socialização de ideias. A investigação matemática, no atual contexto de ensino, desperta grande interesse por ser uma prática pedagógica capaz de estimular no aluno a capacidade de argumentação e socialização de resultados.

Segundo Abrantes e Ferreira (1995, p. 01) “Investigar significa aqui desenvolver e usar um conjunto de processos característicos da atividade matemática, como testar e provar conjecturas, argumentar, usar procedimentos de natureza metacognitiva”. A tarefa exploratória tem por objetivo procurar trabalhar com os alunos atividades capazes de proporcionar um pensamento dinâmico/reflexivo. As tarefas investigativas são capazes de proporcionar uma interação professor- aluno e aluno- aluno, de maneira que cada um tem seu papel fundamental nas explorações propostas pela atividade. Vale ressaltar que a utilização, por parte do professor, de novas ferramentas metodológicas amplia a possibilidade de inserir cada vez mais atividades de exploração matemática em sala de aula.

Investigar matematicamente é desenvolver um trabalho capaz de desafiar os alunos a explorarem uma situação problemática de caráter aberto. O desenvolvimento desse trabalho passa por diferentes etapas (Tabela 1), sendo que a primeira delas é a elaboração de questões, passando em seguida pela formulação e reformulação de conjecturas - momentos esses que envolvem reflexão e argumentação. E, por fim, o objetivo final é justificar e avaliar todo o processo realizado.

Atividades Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Formulação de conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas
Teste e reformulação de conjecturas	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Quadro 1- Etapas de uma investigação matemática (PONTE, 2003, p.7)

As atividades de investigação matemática se assemelham às atividades de resolução de problemas. Lamonato e Passos (2011, p. 70) nos ajudam a compreender as diferenças entre essas duas metodologias:

Na resolução de problemas, o professor elabora os problemas ou as questões, porém, há a possibilidade de que os alunos não sejam apenas os “resolvedores” dos problemas elaborados por outros, mas que também elaborem os seus próprios, que irão resolver. Na exploração-investigação matemática, dada a situação, a elaboração das questões já faz parte do processo resolução. Por outro lado, ao final, ambas as atividades podem promover o debate e a socialização dos resultados como novo momento para argumentação e justificação (LAMONATO E PASSOS, 2011, p.70).

Na resolução de problemas as questões/problemas, na maioria das vezes, já são formuladas pelos professores. Os alunos podem também formular problemas, mas tal etapa é menos frequente. Nas explorações investigativas, o professor apenas determina a tarefa inicial e o papel do aluno é criar questões, conjecturas, argumentar e socializar os dados pesquisados.

Na resolução de problemas, tal como é entendida inicialmente, o objetivo é encontrar o caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada (PONTE, FONSECA e BRUNHEIRA, 1999, p. 94-95).

Segundo Lamonato e Passos (2011, p.70), “O entendimento dado à resolução de problemas pode distanciá-la ou aproximá-la da exploração-investigação matemática, dependendo da proposta apresentada, dos objetivos e das ações do professor, das oportunidades aproveitadas na sala de aula e da atividade do aluno”.

2.2 O papel do professor nas aulas investigativas

As práticas de investigação matemática se apresentam como uma importante metodologia de ensino e aprendizagem da Matemática.

Nas aulas investigativas, cabe ao professor conduzir as práticas pedagógicas de maneira a facilitar o trabalho de investigação do aluno. O professor deve estimular os alunos no decorrer da pesquisa a buscarem suas próprias conclusões, não interferindo de

forma direta nas respostas da tarefa, mas sendo um sujeito capaz de desenvolver um trabalho produtivo.

No arranque da atividade, o professor procura envolver os alunos no trabalho, propondo-lhes a realização de uma tarefa. Durante a atividade, verifica se eles estão a trabalhar de modo produtivo, formulando questões, representando a informação dada, ensaiando e testando conjecturas e procurando justificá-las. Na fase final, o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificaram e se tiram implicações interessantes (PONTE et al, 1999, p. 02).

Para que o professor possa implementar uma atividade investigativa é preciso que ele tenha domínio do conteúdo de Matemática e também da prática pedagógica que será empregada na atividade. O professor precisa sempre estar presente e dando apoio específico para cada grupo. “O professor tem de manter um diálogo com os alunos enquanto eles vão trabalhando na tarefa proposta, e no final cabe-lhe conduzir a discussão coletiva” (PONTE et al p. 02, 1999).

Ponte (1999) explicita que, “O professor tem de ser capaz de apreender intuitivamente as situações, articulando pensamento e ação e gerindo dinamicamente relações sociais; tem de ter autoconfiança e capacidade de improvisação perante situações novas”. Essa autoconfiança e capacidade de improvisação é determinante para dar 'profundidade' às investigações realizadas pelos alunos.

Sendo assim, as atividades investigativas propiciam uma interação mútua e afetiva entre os alunos bem como o fortalecimento da relação professor-aluno.

Ao desenvolver uma atividade exploratória-investigativa, segundo Lamonato e Passos (2009, p. 104), “O professor assume o papel de questionador, de instigador, é quem explora e investiga junto com seus alunos, quem... ensina a perguntar”. Desse modo, os autores evidenciam novamente a importância de um professor preparado para exercer um trabalho investigativo de forma que seu papel seja o de promover motivos para os alunos a quererem buscar respostas para os problemas da questão, possibilitando ao aluno exercer seu papel e sujeito de sua aprendizagem.

Em todo o processo de construção das práticas investigativas recai sobre o professor a responsabilidade de se posicionar diante de uma prática metodológica capaz de transformar a aprendizagem do aluno. Sabemos que, a investigação matemática é uma prática de ensino que exige tanto do aluno quanto do professor, dessa forma existem diversos fatores a se discutir. Ao implementar essa prática de ensino pedagógico o professor poderá ter diversas dificuldades, entre elas podemos citar a falta

de interesse dos alunos; a falta de conhecimento de como realmente funciona a prática investigativa e, principalmente, do conteúdo matemático. Outro fator que dificulta para o professor no decorrer da implementação das atividades investigativas é a questão do desinteresse com a tarefa. A falta de interesse do aluno é um dos principais fatores que dificultam em todos os aspectos o sucesso de uma boa aplicação da atividade. Em outros casos, existe também a situação da falta de um material específico para auxiliar o professor durante a sua aula, sendo que sem esta fonte de pesquisa com certeza a tarefa não será bem sucedida. Esses são alguns dos fatores que dificultam constantemente a aplicação de qualquer atividade investigativa, mais a que mais prejudica todo o processo é a falta de preparação do professor, cujo papel é ser o mediador desta prática de ensino.

3 Problema e Metodologia

O foco desta investigação incide no trabalho com atividades de investigação em um contexto de aulas de Matemática em uma turma de 13 alunos (09 meninas e 04 meninos) do 9º ano do Ensino Fundamental (aproximadamente 14 anos) da Escola Estadual Manoel Pedro Silva, situada na região rural de Nova Matrona (MG).

Entretanto, os demais alunos da turma participaram, mas apenas essa amostra foi colhida para análise, porque apenas estes mostraram interesse com a atividade e com o preenchimento dos termos de consentimento. A tarefa investigativa foi aplicada no horário de aula normal de matemática e apenas eu apliquei a prática. A professora ficou apenas de observadora, ajudando apenas na organização da turma, dessa forma ela não participou de maneira direta na aplicação da tarefa.

Grande parte dos alunos desta escola são de famílias pobres que vivem da agricultura de subsistência, pois, neste pequeno distrito não existe indústrias, fábricas ou outra fonte que possa gerar emprego para seus moradores, fazendo com que os mesmos tenham que criar suas próprias condições de sobrevivência.

Esta pesquisa tem como objetivo verificar se o trabalho com atividades investigativas contribui para o desenvolvimento do pensamento reflexivo dos alunos e, conseqüentemente, propicia uma aprendizagem mais significativa e promove uma nova visão da disciplina Matemática.

Tendo como cenário as atividades investigativas na sala de aula, procurou-se, neste artigo, oferecer uma resposta à seguinte questão: **As atividades investigativas**

dão mais significado ao processo de o ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula?

Tal questão se justifica principalmente pelo fato de não ser comum vermos atividades de investigação matemática nas salas de aulas podendo trazer contribuições tanto para os profissionais de ensino quanto para os alunos.

Devido à especificidade do nosso objeto de pesquisa utilizaremos uma abordagem qualitativa, que se caracteriza por:

A investigação qualitativa, ao inverso da investigação quantitativa trabalha com valores, crenças, representações, hábitos, atitudes e opiniões. Este tipo de investigação é indutivo e descritivo, na medida em que o investigador desenvolve conceitos, ideias e entendimentos a partir de padrões encontrados nos dados, em vez de recolher dados para comprovar modelos, teorias ou verificar hipóteses. Embora estes métodos sejam menos estruturados proporcionam, todavia, um relacionamento mais extenso e flexível entre o investigador e os entrevistados (MIRANDA e BRUNO, 2008).⁴

⁴ Acesso em: 23 de maio de 2016 <<http://adrodomus.blogspot.com.br/2008/06/mtodo-quantitativo-versus-mtodo.html>>

A atividade proposta para os alunos é intitulada “Explorações investigativas com Potências e regularidades” (Figura 1), e tem por objetivo explorar regularidades encontradas em potências de diferentes bases.

**EXPLORAÇÕES INVESTIGATIVAS COM POTÊNCIAS E
REGULARIDADES**

I. O número 729 pode ser escrito como uma potência de base 3. Para o verificar basta escrever uma tabela com as sucessivas potências de 3:

$$3^2 = 9$$
$$3^3 = 27$$
$$3^4 = 81$$
$$3^5 = 243$$
$$3^6 = 729$$

a) Procura escrever como uma potência de base 2

$$64 =$$
$$128 =$$
$$200 =$$
$$256 =$$
$$1000 =$$

b) Que conjecturas podes fazer acerca dos números que podem ser escritos como potências de base 2? E como potências de base 3?

2. Observa as seguintes potências de base 5:

$$5^1 = 5$$
$$5^2 = 25$$
$$5^3 = 125$$
$$5^4 = 625$$

a) O último algarismo de cada uma destas potências é sempre 5. Será que isso também se verifica para as potências de 5 seguintes?

b) Investiga o que se passa com as potências de 6.

c) Investiga também as potências de 9 e as de 7

3. Repara que os cubos dos primeiros números naturais obedecem às seguintes relações:

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 3 + 5$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11$$

• Nota que, no exemplo acima, 13 foi escrito como uma “soma” com um único número ímpar, 23 como a soma de dois números ímpares e 33 como a soma de três números ímpares. Será que o cubo de qualquer número pode ser escrito como a soma de números ímpares?

Figura 01 – Atividade sobre Potências e Regularidades.

Adaptado de: http://www.fecilcam.br/nupem/anais_viii_epct/PDF/TRABALHOS-COMPLETO/Anais-CET/MATEMATICA/easanchestrabalhocompleto.pdf

A atividade acima foi retirada do artigo “TAREFAS INVESTIGATIVAS PROMOVENDO O PENSAMENTO MATEMÁTICO EM ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA”, de Elisângela Araújo Sanshes e Willian Beline, produzido para o VIII Encontro de Produção Científica e Tecnológica.

Esta atividade chamou atenção pelo fato de buscar desenvolver nos alunos a capacidade de raciocínio e a interação com o conteúdo de potências. Por esse motivo, vi nas investigações matemáticas uma maneira significativa de transformar a aprendizagem desses alunos com defasagem do ensino por parte da turma. Então, outra coisa que me chamou a atenção foi à organização e estrutura da atividade, que por si já faz com que o aluno descubra diferentes raciocínios e questões para discussão, pois, foi apresentada de maneira organizada e de fácil entendimento.

Foram pensadas questões para propor aos grupos no decorrer da tarefa, a partir das conclusões a que cada grupo chegar, com o objetivo de fomentar e tentar fazer com que os alunos realizassem a investigação com mais profundidade. Essas questões foram elaboradas pelo professor pesquisador Leonardo, onde via-se a possibilidade de inseri-las no contexto da pesquisa para alavancar novas discussões e ideias dos alunos. Dentre as questões, elencamos:

- Qual regularidade vocês encontraram para as potências de base 03?
- Qual regularidade vocês encontraram para as potências de base 02?
- Quais regularidades vocês encontraram para as potências das bases 05, 06, 07 e 09?
- Será que o cubo de qualquer número pode ser escrito através da soma de números primos?

Levando-se em conta o fato de os alunos não estarem habituados a realizar investigações, e caso os grupos não conseguissem determinar nenhuma ou poucas regularidades foi planejado a realização de perguntas mais direcionadas como:

- Vocês observaram o último algarismo das potências de base 05? Qual é este algarismo? Será que sempre os resultados das potências de 05 terminarão com este algarismo?
- Vocês observaram os dois últimos algarismos das potências de base 02? O que eles têm em comum?
- Vocês observaram o último algarismo das potências de base 06? Será que sempre os resultados das potências de 06 terminarão com este algarismo?

- Qual o critério de divisibilidade por 07?

Tal planejamento foi realizado por considerar-se que saber formular as questões para debate em grupo é o ponto primordial para se ter bons resultados já que é importante não dar a resposta pronta ao aluno, mas também ajudá-lo a prosseguir na atividade caso se encontre 'paralisado'.

A atividade foi gravada/filmada e foi realizada a análise das gravações/filmagens tendo como foco o processo de ensino e aprendizagem vivenciado.

4 Apresentação e Discussão dos resultados

4.1 O processo vivido

A implementação das atividades foi realizada pelo primeiro autor deste artigo, sendo identificado como professor-pesquisador, para não confundi-lo com o professor da turma que encontrava-se presente mas apenas como observador, ou contribuindo com a disciplina da turma em alguns momentos.

Antes de iniciar o trabalho investigativo em sala aula, o professor-pesquisador explicou aos alunos que o trabalho com atividades investigativas é 'diferente' e que o esperado e solicitou que eles tentassem resolver a atividade discutindo com os colegas do grupo, inicialmente sem o auxílio do professor. Os alunos ficaram pensativos sem entender muito bem do que tratava-se o processo de investigação. O professor-pesquisador optou por dar um exemplo para que entendessem a 'lógica' da investigação antes de se dedicarem propriamente a investigação planejada. No quadro registrou:

$$\begin{aligned}10^1 &= 10 \\10^2 &= 100 \\10^3 &= 1000 \\10^4 &= 10000 \\&\dots\end{aligned}$$

Professor-pesquisador/Leonardo: Como encontrar regularidades para este exercício? Encontrar regularidades é encontrar algo em comum ou que segue algum padrão. Então vamos lá!

Professor-pesquisador/Leonardo: - Vocês conseguem perceber alguma regularidade nas potências de base 10?

A partir do momento que fez a pergunta os alunos começaram a pesquisar e discutir sobre possíveis regularidades dadas as potências.

Alunos: - A quantidade de zeros aumenta.

Professor-pesquisador/Leonardo: - Por que isso acontece?

Alunos: - Por que conforme temos o expoente a quantidade de zeros vai aumentando.

Nesse momento a turma pareceu entender um pouco melhor do que tratava-se o ‘desafio’ de investigar potências. Os alunos acharam interessante a proposta de atividade (Figura 1). Uma aluna achou uma grande novidade e afirmou que nunca havia visto algo tão bem elaborado e legal de fazer dentro da Matemática.

Para a implementação da atividade (Figura 1), a turma foi dividida em grupos de cinco alunos. Em um primeiro momento foram distribuídas aos alunos uma folha contendo a atividade “Explorações investigativas com Potências e regularidades” e observada as explorações realizadas pelos alunos com relação às potências.

No decorrer da atividade os alunos apresentaram grandes dificuldades para encontrar as regularidades nas potências. A investigação matemática tratava-se de uma novidade para os alunos e, sendo assim, eles não apresentavam uma familiaridade com a metodologia investigativa, pois, apenas trabalhavam com exercícios, que se diferencia muito do processo de investigação.

Na resolução de exercícios o aluno tem total apoio do professor, principalmente no que diz respeito a auxiliá-lo nas resoluções. Já na investigação, o aluno está sujeito a tirar suas próprias conclusões, sendo o papel do professor o de mediador e não de transmissor de conhecimentos.

Observou-se que ao lidar, pela primeira vez, com situações que solicitam investigação os alunos ficaram sem saber como proceder para chegar a uma resolução. Depois que os alunos compreendem o sentido de se investigar matematicamente, e da importância muito mais do processo do que das soluções, é que saem as primeiras ideias e questões para investigação. Tal fato deve-se aos alunos estarem acostumados com questões bem definidas, que admitem comumente uma única resposta e onde não há espaço para criar novas questões. O normal é receberem tudo pronto e acabado, seja através do livro didático ou pelo próprio professor.

Durante todo o trabalho, o professor-pesquisador percorreu os vários grupos, incentivando a participação dos alunos e acompanhando como estavam desenvolvendo a atividade de investigação. Para exemplificar, indica-se um diálogo em um grupo que investigava as potências de base 03.

Professor-pesquisador/Leonardo: - Qual regularidade vocês encontraram para as potências de base 03?

Joana⁵ respondeu, segundo as ideias de seu grupo: - Que os números seriam ímpares!

⁵Os nomes indicados são fictícios para preservar a identidade dos alunos.

Alunos – Não sabemos...

Professor-pesquisador/Leonardo: - Vocês já sabem que as respostas são pares, então já é uma boa informação e agora? Observem que essas respostas podem ser escritas em duas bases diferentes, quais são elas?

Alunos: - Tem base 02 e 05!

Professor-pesquisador/Leonardo: Investiguem qual regularidade temos para essas informações que acabamos de tirar. Observem as respostas 200 e 1000. O que podemos tirar das bases dessas respostas?

Alunos: - Nelas temos as bases 02 e 05 e os números são pares.

Professor-pesquisador/Leonardo: - Então o que podemos tirar disso?

Alunos: - Que os números podem ser escritos por bases diferentes?

Professor-pesquisador/Leonardo: - Isso mesmo! Eles são pares, como haviam dito anteriormente e podem ser escritos através de bases 02 e 05. Parabéns!

Os alunos apresentavam dúvidas para desenvolver a investigação das potências de base 02. Nesse momento, observar o professor investigar matematicamente funcionou como um ponto de partida necessário para o desenvolvimento do pensamento investigativo, considerando tratar-se de alunos que nunca tiveram contato com práticas investigativas durante sua formação escolar. Neste caso, foi necessário que o professor-pesquisador realizasse perguntas mais direcionadas para fomentar a discussão em grupo e, principalmente, a formulação de novas questões e ideias por parte dos alunos.

Evidencio as seguintes questões, que foram importantes para fomentar novas discussões e, principalmente, para que a investigação dos alunos não ficasse paralisada:

- Vocês observaram os dois últimos algarismos das potências de base 02? O que eles têm em comum?
- O que podemos conjecturar desses dois últimos algarismos dessas potências?
- O que podemos observar investigando as bases dessas potências?

A próxima investigação proposta foi com relação à base 05. Neste momento, os alunos já começaram a apresentar certa capacidade de propor questões e enxergar as regularidades nos exercícios.

Professor-pesquisador/Leonardo: - Qual regularidade vocês encontraram para as potências de base 05?

Alunos: - O último algarismo será 05.

Professor-pesquisador/Leonardo: - Mas será que o último algarismo das potências de 05 sempre será 05? Por quê?

Alunos: Sim! Porque a gente vai contando de 05 em 05 como aconteceu aí.

Professor-pesquisador/Leonardo: Vocês têm algo a mais a dizer sobre as potências de base 05? Grupo 01!

Alunos: - Não! Era só isso mesmo, porque as potências sempre vão terminar em 05.

Professor-pesquisador/Leonardo: - Vocês observaram que a partir de 5^2 os dois últimos algarismos dos resultados das potências é sempre 25? Deixo para vocês pesquisarem o porquê das potências terminarem sempre com 25. Vamos lá!

Nesta parte do exercício os alunos buscaram em primeiro momento dar uma resposta concreta sobre o que foi pedido para a investigação. Eles conseguiram identificar rapidamente a regularidade de os resultados das potências terminarem em 05, contudo, não aprofundaram a investigação buscando novas regularidades.

Percebendo certo desenvolvimento dos alunos sobre a tarefa o professor-pesquisador indicou mais uma questão para os alunos buscarem pesquisar regularidades:

Professor-pesquisador/Leonardo: - Então vamos continuar nossa investigação. Nossa próxima atividade será investigar quais regularidades encontramos para as potências de base 06, 07 e 09.

Márcia: - Nas potências de base 06 os números são pares e terminam sempre em 06. Nas de 07 o expoente determina a quantidade de números. Na de 09 são números ímpares.

Joana: - A soma das potências de 06 e 09 também vai dar 09!

Assim como nas potências de base 03, para as regularidades das potências de bases 06 e 09 vai seguir um padrão que pode confundir os alunos. Quando chegamos num certo ponto das potências de 06 e 09 a soma dos algarismos das respostas dão 09, mas a partir do expoente 04 nas potências de base 06 e do expoente 03 nas potências de base 09, para encontrarmos a regularidade é preciso fazer a soma das respostas até que resulte em apenas um algarismo. Muitos alunos tiveram essa dificuldade, porque pensaram que precisavam realizar a soma dos algarismos apenas uma vez. Dessa maneira, tratamos de mostrar que esse raciocínio expresso se tratava de mais uma regularidade para as potências de bases 06 e 09, assim como aconteceu nas potências de bases 03.

Ivone: - Verdade! As potências de 07 também são ímpares.

Professor-pesquisador/Leonardo: - Muito bem! Vocês construíram algumas ideias a respeito das potências. Analisem em grupo novamente e tirem mais conclusões dessas regularidades. Será que todas as potências de 06 vão terminar com o algarismo 06? Será que o algarismo 07 elevado a determinado número sempre seguirá esse raciocínio descrito por vocês? Então vamos lá!

No decorrer da investigação, questões mais direcionadas fizeram-se necessárias para que os alunos buscassem pesquisar aspectos importantes da atividade. O trabalho investigativo pressupõe que os alunos elaborem suas próprias questões e hipóteses para as atividades, entretanto, foi necessário que o professor-pesquisador se fizesse presente

para apoiar e estimular uma maior interação entre os grupos, fazendo questionamentos/perguntas para que a atividade tivesse um melhor rendimento.

Verificou-se durante a implementação da tarefa que se o trabalho não tiver total apoio do professor os alunos com certeza desistirão de fazer a investigação. Seguem trechos para exemplificar:

Professor-pesquisador/Leonardo: - Reparem os cubos das seguintes potências, seguem alguma regularidade? Descrevam para mim. Coloquem todas as ideias que tiverem em grupo no papel.

Joana: - Vai seguir sim! Olha lá que quando você tem a base 01 vai ter apenas um número, na base 02 vai somar dois números e assim por diante. Será isso mesmo? (Dúvida)

Márcia: - Se a gente somar $3 + 5$ vai dar 08 e será o resultado da potência!

Professor-pesquisador/Leonardo: - Como vocês concluíram, será que o cubo de qualquer número pode ser escrito através da soma desses números? E eles serão números o quê? Lembrem lá do 6º e 7º ano.

Ivone: - Eles são primos!

Professor-pesquisador/Leonardo: Muito bem, eles serão primos! Investiguem se a soma desses números primos sempre será resposta para essas potências cúbicas, seguindo a sequência descrita.

O desenvolvimento do trabalho em grupo proporcionou uma melhor interação entre os alunos/professor-pesquisador e foi um momento importante de construção conjunta de ideias. Cada qual complementava a ideia do outro com uma nova questão, e isso fez com que o trabalho ficasse interessante.

O diálogo entre professor e aluno é um dos pontos primordiais para que a produção de conhecimentos siga uma linha satisfatória dentro do processo de investigação. Os alunos devem ter em mente que investigar nem sempre é acertar tudo o que foi proposto para o estudo, mas sim buscar caminhos a serem investigados, visto que, nesse momento, surgem novas questões a serem investigadas.

Como não houve tempo de finalizar a atividade, e no intuito de propiciar aos alunos mais práticas investigativas em sala de aula, foi proposta uma continuação da atividade sobre potências e regularidades. Neste segundo momento, foi retomada a última questão da tarefa (Figura 1) e acrescida uma nova sequência de potências para serem investigadas.

Dando sequência a atividade, o professor-pesquisador assumiu novamente a sala de aula. Explicitou as características do processo de investigação e apresentou as tarefas que seriam implementadas neste momento. Para começar, foram copiadas no quadro as seguintes potências, passando-se em seguida a explicitar a tarefa:

$$\begin{aligned}11^2 &= 121 \\11^3 &= 1331 \\11^4 &= 14641 \\11^5 &= 161051 \\&\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}12^2 &= 144 \\12^3 &= 1728 \\12^4 &= 20736 \\12^5 &= 248832 \\&\dots\end{aligned}$$

Professor-pesquisador/Leonardo: - Todos aqui têm conhecimento de como devemos proceder para encontrar as regularidades para esse exercício. E hoje vamos continuar com a atividade que não havíamos terminado na aula passada. A atividade será sequência da tarefa sobre a base cúbica em se relacionando com a soma dos números primos e, acrescento uma nova atividade sobre as potências de bases 11 e 12. Peço que vocês pesquisem e busquem as ideias e regularidades acerca desses exercícios e após esse momento iremos discutir as respostas.

Márcia: – Nas bases 11 todos aparecem o número um.

Professor Pesquisador/ Leonardo: - Analisem as respostas das bases 11, eles serão números o quê?

Joana: - Primos!

Nesta primeira etapa da atividade os alunos buscaram interagir em grupo na busca de caminhos para explorar as regularidades das potências e, através disso, conseguiram discutir conceitos e chegar a conclusões interessantes. Vale ressaltar que a intervenção do professor-pesquisador foi de suma importância para incentivar os alunos na busca por soluções, garantindo um ambiente de intensas discussões e troca de ideias.

Se fez necessário que o professor-pesquisador propusesse novas questões para fomentar as discussões em grupo e com isso gerar um ambiente propício à aprendizagem. Segue um diálogo em um determinado grupo.

Professor Pesquisador/ Leonardo: - Isso! E o Número 01 será o quê? E para os expoentes de base 12?

Márcia: - 1 é ímpar!

Joana: - Todos são pares!

Professor Pesquisador/Leonardo: - Observem os expoentes.

Joana: - Cada valor do expoente soma o número 11. A segunda potência vai dar 121, a terceira potência vai dar 1331... E as do 12 representa a mesma coisa.

Professor Pesquisador/Leonardo: - Temos mais regularidades. Observem os dois últimos Algarismos das potências de base 12, os números 44; 28; 36... Eles são divisíveis por quanto?

Ivone: - São divisíveis por 02.

Professor Pesquisador/Leonardo: - Analisem novamente e tirem mais conclusões sobre as potências de base 12.

Neste momento os alunos se sentiam paralisados, pois, não conseguiam mais encontrar regularidades para os exercícios de base 12. Vendo isso o professor pesquisador responsável pela prática levantou mais questões para fomentar novas discussões entre os grupos. Entre elas podemos destacar:

- Observem os dois últimos Algarismos das potências de base 12, o que temos de regularidade?
- Esses Algarismos são divisíveis por qual número?

Em seguida, o professor-pesquisador, dando sequência à tarefa, buscou levar os alunos a investigarem a possibilidade de as potências cúbicas de bases diferentes, poderem ser escritas como a soma de números primos. Foi escrito no quadro as seguintes potências (questão 03 da Figura 1):

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 3 + 5$$

$$3^3 = 7 + 9 + 11$$

$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

...

Observou-se ao final da investigação que os alunos já se sentiam bastante motivados e mais seguros com esse tipo de tarefa. Destaca-se um diálogo, para exemplificar a interação professor-aluno na exploração de possibilidades de resolução para a tarefa.

Professor Pesquisador/Leonardo: - Qualquer número elevado ao cubo pode ser escrito como a soma de números primos?

Júlio: - Não!

Professor Pesquisador/Leonardo: - Por que não podem? Explique para a turma. Mostre porque pra você a soma de números primos não seria igual a qualquer número elevado ao cubo. Continue a sequência e observe...

Júlio: - Eu não sei a resposta.

Professor Pesquisador/Leonardo: - Por exemplo: 2^3 (dois elevado ao cubo) vale quanto?

Júlio: - 8!

Professor Pesquisador/Leonardo: - E se somássemos os números primos 3 e 5, você encontra quanto?

Júlio: - 8!

Professor Pesquisador/Leonardo: - Analise então: Será que a soma de números primos sempre poderá ser escrita como uma potência de 3?

Joana: - Claro!

Professor Pesquisador/Leonardo: - Para ter certeza disso é preciso antes investigar. Tentar com vários números. Não vale falar sem antes tentar resolver a tarefa. Para concluir isso basta que vocês continuem completando a sequência. Dessa maneira, tem que pesquisar se essas bases elevadas à diferente expoente serão iguais as respostas das somas dos números primos.

Alunos: - Sempre vai dar a resposta.

Professor Pesquisador/Leonardo: - Continuem assim. Busquem mais regularidades e ideias em grupo sobre a atividade.

O papel do professor é sempre importante para motivar os alunos a buscarem por mais soluções para os problemas. A interação em sala de aula entre professor-aluno e aluno-aluno é fundamental para se construir uma prática capaz de fomentar grandes discussões e respostas para a tarefa.

No decorrer das aulas sobre a pesquisa investigativa relacionada às “potências e regularidades”, o professor-pesquisador busca explorar com os alunos as principais regularidades das potências propostas. Muitos alunos apresentavam respostas claras para a atividade, no entanto, outros tinham dúvidas e colocavam em discussão questões que apresentaram grande importância para a busca de caminhos e respostas para a tarefa, que foi fundamental para a construção do conhecimento dos alunos enquanto sujeitos transformadores da sua própria aprendizagem.

No decorrer da aplicação da atividade sobre potências e regularidades tive algumas dificuldades para desenvolver o meu planejamento metodológico. Um dos fatores que dificultaram minha prática foi à falta de interesse, que foi um aspecto difícil de controlar durante todo o desenvolvimento da aula. Outro fator determinante foi a minha falta de experiência e conhecimento com a prática de ensino investigativa, pois, era a primeira vez que eu como docente aplicava uma inovadora prática de ensino. Ao final do meu projeto, tanto em sala de aula quanto no meu trabalho teórico foi importante ver o aprendizado conquistado durante as pesquisas. Por parte dos alunos grande parte foram conhecedores de uma nova maneira de pensar e fazer matemática, da mesma maneira eu estava imerso num mar de novos conhecimentos, neste caso se tratando de uma nova maneira de trabalhar em sala de aula, visando mostrar ao aluno que o próprio poderia construir a sua própria aprendizagem.

Foram momentos que vivenciei enquanto professor, pois, além de estar conhecendo e me qualificando com uma prática de ensino inovadora pude estar mostrando aos alunos que eles são capazes de transformar a sua própria aprendizagem através da investigação matemática. Todo o processo que vivenciei em sala de aula me ajudou a crescer como docente, e isso possibilitou que eu buscasse a cada instante uma nova maneira de me posicionar frente a esta prática de ensino. Existiram sim as dificuldades, como a falta de experiência e a falta de interesse de parte dos alunos, mais dentre os aspectos positivos podemos tirar a intensa aprendizagem e o volumoso momento de discussões em grupos que criou um intenso ambiente de aprendizagem. Enfrentei as dificuldades de maneira que ao final transformamos esse ponto negativo numa fonte de aprendizagem significativa.

5 Considerações finais

Este trabalho buscou investigar a potencialidade das atividades investigativas em dar mais significado ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática em sala de aula.

A partir da vivência com a implementação da atividade “Explorações Investigativas com Potências e Regularidades” foi possível identificar o trabalho com atividades de investigação em sala de aula como uma metodologia com grande potencialidade de tornar o aluno mais autônomo, reflexivo e capaz de encontrar suas próprias soluções para diferentes situações matemáticas.

Durante a implementação da atividade foi possível verificar momentos em que os alunos se dedicaram a criar conjecturas, discutir as mesmas em grupo, levantar novas questões e testá-las. Tais ações, no entanto, pelo fato de os alunos não estarem habituados com atividades de investigação exigiram grande intervenção do professor-pesquisador fazendo-se necessário que o mesmo levantasse questões para fomentar discussões e motivá-los a buscarem suas próprias respostas dentro de cada grupo.

Constatou-se que a prática investigativa é, pois, capaz de proporcionar um processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico em sala de aula com destaque para a evolução dos alunos no que diz respeito a uma nova maneira de se posicionar diante de uma atividade.

Existem algumas limitações que dificultaram de certa forma o desenvolvimento da atividade. Sabe-se que em sala de aula regular sempre existem problemas que

dificultam constantemente o trabalho do professor, e um deles é a falta de interesse do aluno. Na aplicação da atividade investigativa existiu esse pequeno problema, mais nada que atrapalhasse o desenvolvimento da tarefa, principalmente para quem queria aprender. Tentei de diversas formas incentivá-los a desenvolver a investigação, mas não houve interesse por parte de uma pequena parcela de alunos. Mesmo com o desinteresse dessa pequena parcela a atividade investigativa foi bem aceita pela turma, que viu nessa nova metodologia de ensino uma nova maneira de estar desenvolvendo um pensamento matemático voltado para uma nova prática de ensino.

Por fim, pode-se destacar durante toda a construção do trabalho, principalmente, da prática em sala de aula, que o processo de investigação matemático se torna hoje uma forte metodologia capaz de transformar o ensino em sala de aula e mostra ao aluno uma nova visão da Matemática neste campo de ensino. Através disso, o aluno construirá conhecimentos que servirão de base para a sua vivência com novas atividades investigativas que posteriormente aparecerão no decorrer da sua vida. Essa implementação prática em sala de aula possibilitou conhecimentos para o meio acadêmico como fonte de pesquisa, mas também para os alunos enquanto sujeitos transformadores do seu conhecimento. Dessa forma, a investigação matemática foi uma metodologia marcante na vida desses alunos, pois, foram conhecedores de uma inovadora prática de ensino, na qual foi um instrumento capaz de gerir uma nova aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos.

Referências

ABRANTES, Paulo; FERREIRA, Catarina e et al. Matemática Para Todos – investigações na sala de aula. **ProfMat95**. p. 243-249. Lisboa, 1995.

DAVID, Maria Manuela M.S. As possibilidades de inovação no ensino-aprendizagem da Matemática elementar. **Presença Pedagógica**. Belo Horizonte, v. 1, n.1, p.57-66, jan/fev, 1995.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Carmem Lúcia Brancaglioni. Aprendizagens de professoras da educação infantil: possibilidades a partir da exploração – investigação em geometria. **Ciências e Cognição**. v. 14, n. 02, p. 92-112, 2009.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Carmem Lúcia Brancaglioni. Discutindo Resolução de Problemas e Exploração Investigação Matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetiké – FE/Unicamp**. v. 19, n. 36, p. 51-74 – jul/dez 2011.

MIRANDA, Bruno. Método Quantitativo versus Método Qualitativo. Disponível em <<http://adrodomus.blogspot.com.br/2008/06/mtodo-quantitativo-versus-mtodo.html>> Acesso em 23 de maio de 2016.

PONTE, João Pedro da e et al. O Trabalho do professor numa sala de investigação matemática. **Departamento de Educação da Faculdade de Ciências e Centro de Investigação em Educação, Universidade de Lisboa**. Lisboa, 1999.

PONTE, J.P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. 2003. Disponível em < <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4071/1/03-Ponte%20%28Rev-SPCE%29.pdf>> Acesso em 14/04/2016.

PONTE, João Pedro Mendes. Investigar, ensinar e aprender. Faculdade de Ciências. Universidade de Lisboa. **Atas do ProfMat**. p. 25-39, 2003.

PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. Lisboa: *Actas do ProfMat99 (APM)*, p.91-101, 1999.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: **Autêntica**. v.7, 2003.

SANSSES, Elisangela Araújo; BELINE, Willian. Tarefas Investigativas Promovendo o Pensamento Matemático em Alunos Da Educação Básica. VIII Encontro de Produção Científica e Tecnológica. Paraná, 2013.

SILVA, A.; VELOSO, E.; PORFÍRIO, J.; ABRANTES, P. O currículo de Matemática e as atividades de investigação. In: ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. p. 69-85.

ZORZAN, A. S. L Ensino-aprendizagem: algumas tendências na educação matemática. **Revista Ciências Humanas Frederico Westphalen**. v.8, n.10, p. 77-93, Jun 2007.