

POTENCIALIDADES DAS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Elisângela Sales Pereira¹
Eduardo Gomes Fernandes²
Adriana Assis Ferreira³

Resumo: O objetivo deste trabalho é explorar a investigação matemática enquanto uma metodologia no ensino de Matemática. Interessa-nos compreender como promover através da implementação de investigações matemáticas o interesse por esta disciplina e conseqüentemente beneficiar o processo de ensino e aprendizagem. Para tanto, foi implementada uma atividade investigativa de Geometria para um grupo de quatro alunos de uma turma do 9º ano de uma escola estadual da cidade de Taiobeiras (MG). Foi aplicada em período contra-turno pela professora (pesquisadora) que durante todo o desenvolvimento da atividade prestou auxílio ao grupo resguardando o seu papel diante de uma atividade investigativa. Durante a implementação da atividade foram coletados dados através de registros feitos pela professora pesquisadora que logo após passaram por análises reflexivas. Concluiu-se, respondendo a questão da pesquisa, que foram identificadas as seguintes potencialidades para as atividades investigativas: estímulo ao raciocínio e a aprendizagem; discussão e questionamento de forma crítica nas conclusões obtidas, de forma a encontrar respostas e justificá-las com mais tenacidade; preocupação e esforço na forma de justificar, demonstrar suas descobertas; ajuda coletiva e colaboração entre os alunos; exploração de situações matemáticas, colaborando para o espírito investigativo do aluno; observação plana e espacial das figuras; generalização dos resultados; despertar de curiosidade e interesse pelo assunto abordado e participação e envolvimento dos alunos na atividade proposta.

Palavras-Chave: Investigações matemáticas. Ensino e aprendizagem. Potencialidades das atividades investigativas.

1 Introdução

No contexto do ensino de Matemática, a utilização da investigação como uma metodologia, visa à capacidade de raciocínio e o uso de conjecturas e processos estabelecidos para soluções de problemas. Com isso, procura-se ‘desafiar’ os alunos com o propósito de impulsioná-los a uma posição de exploração e investigação diante de um problema ou situação matemática.

Os alunos são curiosos, exploradores por natureza, gostam de saber o porquê das coisas, sua importância e utilidade. Essa característica pode ser considerada como uma

¹ Aluna do Curso de Matemática – UFVJM Polo de Apoio Presencial – Taiobeiras.
E-mail: elinha.rpm@hotmail.com.

² Eduardo Gomes Fernandes – Diretoria de Educação Aberta e a Distância – DEAD/UFVJM
E-mail: eduardo.fernandes@ufvjm.edu.br.

³ Adriana Assis Ferreira – Diretoria de Educação Aberta e a Distância – DEAD/UFVJM
E-mail: aassisferreira@gmail.com.

forte aliada na produção de conhecimento. O ato de analisar, descobrir, formular conjecturas, organizar, justificar e tirar conclusões prepara o aluno e o faz refletir e diligenciar mais profundamente o seu raciocínio (ABRANTES, 1999).

As práticas metodológicas estão sempre passando por reformulações para melhor atender as expectativas e novas demandas para o aprendizado, com isso, é imprescindível a reflexão das práticas, suas melhorias e elaboração, sendo assim, o ato de experimentar, testar, analisar faz parte deste processo. Para tanto, a motivação para esta pesquisa se dá à potencialidade e evolução de aprendizagem que as investigações matemáticas como uma metodologia, podem proporcionar ao ensino e aprendizagem de Matemática.

O objetivo deste trabalho é explorar as investigações matemáticas enquanto uma metodologia no ensino de Matemática, a partir da implementação de uma atividade investigativa de Geometria em uma turma do 9º ano de uma escola estadual da cidade de Taiobeiras (MG).

2 Marco Teórico

2.1 Investigação matemática, contribuições metodológicas

A investigação sempre fez parte do processo científico no ato de descobertas e testes de comprovações dos pesquisadores. Na Matemática, esta ferramenta tem sido estudada por alguns educadores como uma metodologia favorável para o ensino e aprendizagem em sala de aula.

Mas o que é investigar? Segundo Ponte (2003, p. 2), “‘investigar’ não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com [que] nos deparamos.”. Para este autor o ato de investigar está diretamente ligado ao ato de aprender, sendo estes dois constantemente influenciados um pelo outro na aquisição de conhecimentos relevantes.

As investigações matemáticas possuem pontos em comum, mas se diferenciam da resolução de problemas já que

na resolução de problemas, tal como é entendida inicialmente, o objetivo é encontrar o caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe

qual será o ponto de chegada (PONTE, FONSECA e BRUNHEIRA, 1999, p. 94-95).

Sendo assim, as investigações matemáticas podem assumir um papel favorável para a aprendizagem, podendo ser representada como uma metodologia que visa à capacidade de raciocínio e o uso de conjecturas e processos estabelecidos em atividades com características de descobertas.

A principal pretensão das tarefas desenvolvidas por esta metodologia durante as aulas é “que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas e assumam uma visão mais alargada da natureza desta ciência” (PONTE, 2003, p.12). O autor ratifica que as tarefas investigativas possuem quatro dimensões básicas, sendo (i) o grau de dificuldade; (ii) a estrutura; (iii) o contexto referencial; e (iv) o tempo requerido para a sua resolução. Ainda, segundo Ponte, as atividades de investigações possuem um grau de dificuldade elevado, estrutura aberta e com referência a contextos de situações reais ou matemáticos.

Para realização destas atividades é interessante os alunos saberem conceitos e procedimentos para facilitar a resolução das tarefas, porém, de acordo com Ponte (2003), o aluno pode aprender sem que haja necessariamente, uma ‘bagagem’ de conhecimentos sobre o assunto proposto:

Mas muitas coisas aprendem-se melhor em atividades significativas, lutando com dificuldades concretas, do que de uma forma dedutiva e linear. Muitos conceitos e procedimentos podem ser aprendidos através de atividades exploratórias e investigativas. Por isso, não tem de ser “primeiro uma coisa e depois a outra”. Pode ser, “umas vezes primeiro uma coisa, outras vezes primeiro a outra”, ou ainda, por vezes, “as duas ao mesmo tempo” (PONTE, 2003, p. 12).

Em um estudo realizado por Rocha e Ponte (2006) através de um conjunto de investigações matemáticas com alunos do 7º ano de escolaridade de diferentes níveis de desempenho, com o objetivo de saber se os mesmos manifestavam novos conhecimentos, capacidades matemáticas, concepções e atitudes com relação à Matemática e aprendizagens obtidas nessa disciplina. Ao término do trabalho eles puderam concluir em relação a esta abordagem que:

(...) as potencialidades que a realização deste tipo de tarefas tem para proporcionar aos alunos de diferentes níveis de desempenho um novo tipo de experiência matemática, suscetível de estimular a sua

capacidade de raciocínio, o seu desembaraço em lidar com situações matemáticas de natureza aberta e de alterar a sua visão desta disciplina (ROCHA e PONTE, 2006, p. 24).

Os autores relataram as potencialidades que a investigação como metodologia pode agregar no ensino e aprendizagem dos alunos através de suas pesquisas, independentemente do nível de desempenho deles ou a série que se encontram. Destacaram que a utilização da investigação matemática apresentou resultados relevantes, onde os alunos disseram que “sentem ser positivo para a sua aprendizagem” este tipo de tarefa (ROCHA e PONTE, 2006, p. 24).

Segundo Abrantes (1999, p. 1), muitos “autores e investigadores da área da Educação Matemática têm sublinhado a importância de se atribuir, na escola, um papel central ao objetivo de ‘pensar matematicamente’”. Essa argumentação tem em tese que, com a realização de atividades abertas com expectativas exploratórias e investigativas podem gerar esta forma de pensar, possibilitando os alunos a lidar “com processos fundamentais da atividade e do pensamento matemático, como formular problemas, fazer e demonstrar conjecturas ou comunicar descobertas”. De fato, com as atividades investigativas é possível pensar de forma criativa, tomar iniciativas, traçar e formular os próprios procedimentos e conjecturas, experimentar e justificar de diversas formas das quais forem pertinentes para entender de forma significativa o problema em questão.

Os relatórios são frequentemente utilizados durante a realização das atividades de investigação matemática, onde os próprios alunos relatam todos os procedimentos utilizados por eles e as conjecturas formuladas. Além disso, “a realização de relatórios escritos parece ajudá-los a melhorar a sua capacidade de argumentar e justificar os resultados matemáticos obtidos” (ROCHA e PONTE, 2006, p. 5).

As investigações matemáticas podem ser aplicadas em conteúdos diversos da Matemática, em especial na Geometria, onde “a sua exploração pode contribuir para uma compreensão de fatos e relações geométricas que vai muito além da simples memorização e utilização de técnicas para resolver exercícios-tipo” (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2006, p.71). A Geometria é evidenciada no que diz respeito às atividades investigativas em sala de aula, que segundo Abrantes (1999):

(...) a Geometria torna-se mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares. Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem

ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver exercícios-tipo (p. 4).

A Geometria possui uma grande variedade de aspectos positivos que valorizam o currículo, podendo agregar a todos os níveis de escolaridade e, portanto, sustenta várias aprendizagens como no plano e no espaço, representações, visualização, dimensões e faz conexões com outros domínios da Matemática como, por exemplo, na Álgebra e cálculo combinatório (ABRANTES, 1999).

A implementação de investigações em sala de aula ainda integra desafios ao currículo de Matemática e dificuldade de aceitação por alguns professores. Alguns países, como Portugal, Inglaterra e França possuem uma significativa abordagem do trabalho investigativo nos currículos de Matemática e nos documentos curriculares norte-americanos (PONTE et al., 1999, apud PONTE et. al., 1998). O currículo inglês inclui tópicos diretamente relacionados ao trabalho investigativo na “*using and applying mathematics*”, que é considerada uma das suas grandes áreas de objetivos. O programa francês destaca a importância de afeiçoar os alunos em atividades científicas, tendo referência evidente ao processo de descoberta. Já o programa português do ensino básico (anos iniciais) leva em consideração esta perspectiva quando faz referência à realização de atividades com características de pesquisa e exploração ou quando há uma formulação de conjecturas pelos alunos. Em relação ao ensino secundário (anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) o programa faz uma inclusão de sugestões concretas para auxiliar na realização deste tipo de trabalho (PONTE et. al., 1998).

2.2 O Papel do professor

Na investigação matemática o ‘ensinar’ pode assumir um papel diferente ao habitual, podendo tornar-se mais complexo. O professor passa a avaliar em seu trabalho os resultados e a promoção da aprendizagem gerada pelos seus alunos.

Durante o desenvolvimento das tarefas o professor procura incentivar e envolver os alunos na atividade. Sempre confere se eles estão realizando de forma produtiva, formulando e testando conjecturas, questões, indagações, representando corretamente a informação proposta e justificando-as (PONTE et. al., 1998).

É importante que o professor promova um ambiente onde os alunos se sintam confortáveis para apresentação de suas conjecturas, argumentações que implicam em opiniões às ideias de seus colegas sem desvalorizar o seu raciocínio.

Para promover o diálogo e favorecer o raciocínio durante a realização das atividades, o professor deve agir de forma que não dê a resposta para os alunos, mas que faça perguntas e indagações para fomentar a discussão e conseqüentemente o raciocínio deste.

O professor pode também fazer novas perguntas para os alunos, ato que favorece o encaminhamento da atividade e desenvolve a reflexão crítica, que de acordo com Ponte et. al. (1998) podem ir além de habilidades relacionadas à Matemática:

Ao mostrar aos alunos que é possível olhar para as ideias matemáticas de modo interrogativo, colocando questões que podem ser investigadas – e promovendo a investigação, de fato, de algumas delas – o professor está a exercer um importante papel na educação não só do raciocínio matemático dos alunos, mas também do modo de eles se relacionarem com o mundo (p. 13).

No último estágio, o professor promove uma espécie de discussão coletiva das conclusões obtidas pelos alunos, quais dúvidas e implicações que tiveram que foram interessantes, atentando para o bom diálogo para propiciar um ambiente favorável a aprendizagem e estimulante para a comunicação entre os alunos (PONTE et. al., 1998).

Este último estágio, é propício para a promoção e construção de conhecimento para o aluno e também para o professor. Ponte (2003, p. 9), afirma que esse momento é decisivo para o aproveitamento do trabalho realizado, em que “o professor responde às dúvidas dos alunos, dando-lhes atenção e encorajamento sem lhes dar diretamente a resposta, e o modo como se formulam as questões, envolvendo toda a turma e pondo os alunos a argumentar uns com os outros”.

Durante as atividades alguns alunos podem encontrar dificuldades por não compreenderem a atividade pelo fato de ser algo novo, uma abordagem do conteúdo diferente ao que estão acostumados. As atividades de investigações matemáticas podem ser desenvolvidas de forma individual ou geralmente em grupos de 3 (três) à 5 (cinco) integrantes. Quando feito em grupos, há uma maior colaboração e participação dos alunos, sendo que, as atividades investigativas fazem com que

(...) os estudantes se esforçam, dentro de limites razoáveis, eles trabalham mais ativamente e se dedicam mais, buscando dar sentido à situação, que, por sua vez, leva-os a construir interpretações mais

ligadas ao que eles já conhecem e/ou a reexaminar e reestruturar o que já sabem (FERREIRA, 2012, p. 53).

Alguns alunos precisam ser incentivados com maior intensidade pelo professor, pelo fato de apresentarem desinteresse por algum motivo ou não (ou por outros fatores) pelas atividades investigativas. Em primeiro momento, os alunos não saberão o que é investigação, mas com as experiências com esse tipo de trabalho vão se socializando e descobrindo como é executado esse tipo de trabalho (PONTE, 2003).

A liberdade atribuída aos alunos durante as atividades investigativas fazem com que, eles usem conhecimentos empíricos e ao mesmo tempo colaborem entre si com os conhecimentos uns dos outros, contribuindo para a construção coletiva da aprendizagem.

3 O contexto, os participantes e os procedimentos empregados

O foco desta investigação incide em explorar as potencialidades da investigação matemática enquanto metodologia de ensino relevante ao currículo dos alunos em um contexto de aulas de Matemática.

Nesse sentido, optou-se pela aplicação de uma atividade de Geometria para um grupo formado por quatro alunos (1 menina e 3 meninos) do 9º ano do Ensino Fundamental (aproximadamente 14 anos) de uma escola pública situada na região urbana de Taiobeiras (MG).

A seleção desses alunos deu-se pelo fato de os mesmo terem mostrado interesse e disponibilidade para participar da atividade. A escolha não foi feita através de critérios pré-estabelecidos, sendo que, todos da turma foram convidados a participarem.

A finalidade desta pesquisa é analisar como esta metodologia influencia o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e os benefícios que as atividades de investigação podem trazer para tal processo e para a valorização desta ciência pelos alunos. Para tanto, pretende-se verificar as questões objetivadas através de registros da professora e dos alunos durante a implementação da atividade em sala de aula.

Procurou-se, neste artigo, oferecer uma resposta à seguinte questão: **Quais as potencialidades da implementação de investigações matemáticas em sala de aula para a qualidade de aprendizagem dos alunos e o interesse por essa disciplina?**

Nesta pesquisa adotou-se uma abordagem qualitativa. Esta possibilita um

enfoque maior no processo e procura verificar os eventos e procedimentos decorridos em situações cotidianas de interações diretamente no ambiente de pesquisa, na qual, são estudadas as “perspectivas dos participantes” e as características que atribuem, onde são os principais focos estudados pelo pesquisador. A abordagem apresenta-se como mais adequada, levando-se em consideração os objetivos pretendidos (LUDKE e ANDRE, 1996).

Para a coleta de dados, foram feitas gravações durante a implementação da atividade investigativa na sala de aula (fonte direta de dados) que possibilitou a captura de todos os diálogos e eventos, participação e interações dos sujeitos da pesquisa, incluindo a pesquisadora que assumiu o papel de professora com a intenção de fazer uma observação participativa tendo a preocupação da coleta dos dados e o desenvolvimento da atividade.

Para tanto, o trabalho foi desenvolvido em três momentos:

1º Momento: Escolha da atividade a ser implementada

A atividade denominada *Dobragens e Cortes* foi extraída do livro *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2006, p. 72-74), e foi escolhida por possuir uma sequência didática e características que podem ser investigadas de diversas formas pelos alunos e faz uso de material manipulável como auxílio nas explorações. A atividade foi implementada (no dia 06/05/2016) pela primeira autora e contou com o auxílio da professora Sandra⁴, responsável pela turma.

A atividade de Geometria é bastante propícia para o ensino através de investigações e explorações, induz a reflexão e visualização. Portanto, a proposta tem o objetivo de construir triângulos equiláteros, isósceles e escalenos a partir de cortes feitos em folhas dobradas. Traz uma série de conceitos e propriedades geométricas que os alunos poderão investigar e explorar, contribuindo para raciocinarem de forma livre e alternativa na procura e experimentações de conjecturas que auxiliarão a justificar suas descobertas e descrevê-las no relatório que terão que produzir.

Apesar das diretrizes do Currículo Básico Comum (CBC) do Ensino Fundamental preverem que o conteúdo relacionado à classificação de triângulos seja abordado no 6º ano, houve uma preocupação em saber se realmente os alunos do 9º ano

⁴ Nome fictício. A professora Sandra é habilitada em Matemática leciona aulas nos anos finais do Ensino Fundamental em uma escola estadual do município de Taiobeiras, onde é professora regente, responsável pela turma que foi implementada a atividade investigativa.

já haviam estudado esse conteúdo. Desta forma, previamente à aplicação da atividade, confirmamos antecipadamente com a professora Sandra essa questão. Portanto, a atividade poderá trazer uma fundamentação do conhecimento anteriormente adquirido e/ou uma aprendizagem para aqueles alunos que, por algum motivo, não assimilaram o referido conteúdo quando estudaram.

Apresentamos a seguir, a atividade transcrita:

Dobragens e Cortes

Por certo que na sua infância, na escola ou com amigos, você se entretteve fazendo cortes em papel e brincando com os desenhos que obtinha.

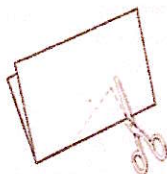
Para explorar essa tarefa, vai precisar de uma tesoura e de muito papel!

A – Uma dobragem e dois cortes

1. Numa folha de papel dobrada ao meio, corte triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Pegue nos pedaços de papel que obteve, desdobre-os e diga quais as formas geométricas que têm.



2. Com apenas dois cortes, e, se quiser obter triângulos equiláteros, isósceles e escalenos na folha de papel, que cortes deve fazer?

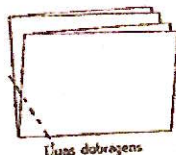


Desenhe o esboço que mostre os cortes que fez e comente as suas descobertas.

B - Mais dobragens e um só corte

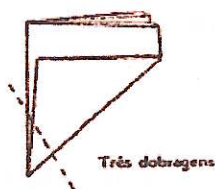
Vai agora investigar o que acontece quando faz mais do que uma dobragem mantendo ajustados os lados da folha de papel.

1. Com duas dobragens e um corte, que tipo de figura obtém?



De que maneira consegue obter um quadrado?

2. Agora com três dobragens, como mostra a figura que se segue, experimente fazer a mesma investigação.



De que maneira consegue obter um quadrado?

3. E com quatro dobragens?

4. Preencha a tabela que relaciona o número de dobragens com o número máximo de lados da figura que se pode obter fazendo-se apenas um corte:

nº de dobragens	nº máximo de lados

Quadro 1. Atividade 'Dobragens e Cortes'

2º Momento: Implementação da atividade

A atividade foi aplicada no turno vespertino (contra-turno) e demandou 2 horas e 30 minutos para sua execução. Os quatro alunos foram organizados em forma de um grupo e foram orientados sobre o que é investigar e os papéis que os integrantes podem assumir durante a investigação, já que os alunos não tinham experiências com investigações matemáticas.

Esse foi o momento do desenvolvimento da atividade investigativa em que, o grupo realizou a atividade e fez um relatório que solicitava os procedimentos empregados, conjecturas formuladas, justificativas e conclusões. As experimentações com os cortes e demais procedimentos foram livremente atribuídos entre os alunos do grupo, para que se sentissem mais a vontade na escolha de suas funções.

Durante a atividade a professora pesquisadora ficou disponível para auxiliar o grupo, resguardado o papel que a atribuiu durante a atividade, ou seja, uma postura que incentivou o envolvimento dos alunos, na qual, promoveu discussões e não deu respostas prontas para que os alunos pudessem formular questões e conjecturas a partir das explorações.

Após o desenvolvimento da atividade, os alunos entregaram os relatórios e deu-se início ao debate coletivo do trabalho realizado. Foi um momento importante para o aproveitamento da fase anterior, pois foi possibilitado à professora pesquisadora responder as dúvidas dos alunos sem lhes dar diretamente as respostas, incentivando-os a argumentar uns com os outros.

3º Momento: Análise

O momento de Análise foi feito durante todo o processo do 2º momento e se estendeu depois de seu término. Para a análise, foram recolhidos materiais obtidos durante a aula de implementação da atividade, como: registros escritos dos alunos, registros fotográficos e vídeos, relatório do grupo, as reflexões da professora e reflexões/narrativas do grupo (como sugerido por PASSOS, LAMONATO e PITON-GONÇALVES, 2006).

4 Apresentação e Discussão dos resultados obtidos da implementação da atividade investigativa

A implementação da atividade deu-se em horário contra-turno das aulas normais dos alunos para ter um melhor aproveitamento e sequência tendo 2 horas e 30 minutos de duração. Participaram da pesquisa quatro alunos, três meninos e uma menina, todos com 14 anos de idade, formando um grupo. Foram utilizados pseudônimos para preservação da identidade dos alunos participantes, na qual foram escolhidos pelos próprios alunos: Guilherme, Ingrid, Júnior e Renan.

No início da implementação da atividade os alunos foram orientados brevemente pela professora pesquisadora sobre algumas características das atividades investigativas, já que os alunos não tinham experiência com esse tipo de atividade. Depois disso, foram distribuídos ao grupo tesouras e bastante papel para serem utilizados nas explorações e investigações da atividade proposta.

Quando iniciaram a atividade, o grupo não teve dificuldades nos cortes que deveriam ser feitos, já que estava representado na atividade um esboço do corte. Porém, começaram a perguntar uns aos outros sobre os nomes dos triângulos, disseram que não recordavam os nomes específicos de cada triângulo. Então a professora pesquisadora interveio e fez uma rápida revisão com representações dos triângulos e seus respectivos nomes no quadro. A professora pesquisadora também chamou a atenção do grupo para

que trabalhassem coletivamente e discutissem entre si as suas descobertas, justificativas e conclusões orientando que fossem todas registradas em um relatório.

Depois disso, os alunos começaram a interagir mais e procuraram descrever suas descobertas, porém, sem a preocupação de justificá-las ou prova-las. Para fins de registros de suas descobertas, o grupo escolheu um representante, a aluna Ingrid, porém, a aluna encontrou dificuldades em relatar o que estava sendo dito, pois todos estavam falando rápido e ao mesmo tempo. Desta forma, a professora pesquisadora achou melhor cada aluno fazer um relatório mais simples com ideias coletivas para que posteriormente o grupo reunisse em apenas um relatório as anotações que haviam feito individualmente. Os alunos também tiveram dúvidas de como justificar de maneira satisfatória suas conclusões, algo interessante, pois demonstraram a preocupação de descreverem suas justificativas de forma mais concreta. Então, a professora explicou ao grupo que poderiam ser registrados de várias formas, seja em forma narrativa ou através de desenhos e com isso os alunos se sentiram mais tranquilos para elaborar seus registros.

No desenvolvimento da Parte A – *Uma dobragem e dois cortes* os alunos não apresentaram dificuldades na primeira questão, na qual pedia para que cortassem triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Rapidamente, todos recortaram e descreveram as figuras que obtiveram; quadriláteros que disseram ser losangos e paralelogramos com os cortes de triângulos equiláteros e isósceles; e um triângulo isósceles após o corte de um triângulo escaleno na folha conforme figura abaixo (Figura 1).

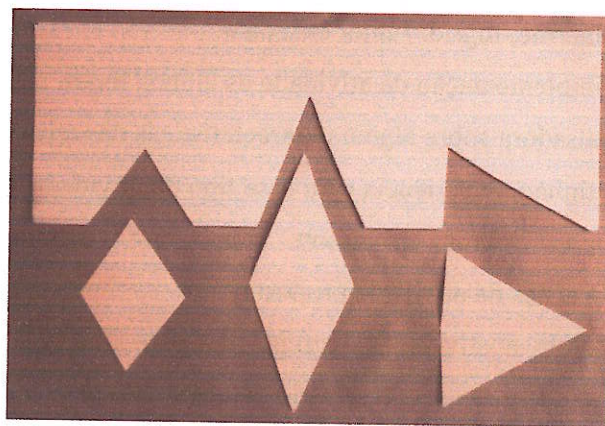


Figura 1 – Cortes feitos pelo grupo com uma dobragem e dois cortes no formato de triângulos equilátero, isósceles e escaleno.

Na segunda questão, os alunos tiveram dúvidas já no enunciado e consequentemente tiveram dificuldades iniciais para desenvolverem os procedimentos. Foi preciso a professora pesquisadora ler o enunciado juntamente com os alunos e explicar o que estava sendo pedido na questão. Depois disso, os alunos compreenderam e de imediato disseram que já haviam achado um triângulo isósceles na questão anterior, pois tinham feito um corte perpendicular a dobradura da folha e ao abri-la se depararam com uma situação que envolveu uma simetria.

O grupo fez vários cortes até que acharam o triângulo equilátero e depois de várias tentativas disseram que era impossível encontrar um triângulo escaleno. Somente depois que fizeram os cortes começaram a justificar cada caso em específico. Em relação à justificativa dada para encontrar os triângulos isósceles e equilátero disseram que o corte tinha sido perpendicular a dobradura da folha e, portanto, fazendo um ângulo de 90° graus (Figura 2).

Ingrid: Com o triângulo escaleno consegue achar o triângulo isósceles.

Guilherme: (Com a figura na mão e visualizando em diversos ângulos) Todos os lados que vira ele é um triângulo... Triângulo equilátero!

Ingrid: Acho que é o isósceles... Porque os dois lados são iguais.

Guilherme: Deixa eu ver aqui (pegando o triângulo e fazendo medições em seus lados com o dedo). Todos os lados são iguais! Ele é o equilátero.

Júnior: Este aqui é um isósceles (mostrando o corte que havia feito).

Professora-pesquisadora: E como vocês os encontraram?

Guilherme: Fazendo um ângulo de 90° , assim... (mostrando a folha na horizontal e o corte na vertical) quando abre dá 180° em baixo...

Ingrid: Um corte de 90° , perpendicular...

Os alunos também discutiam a questão da simetria ao perceberem que ao recortarem um lado, quando abriam eram simétricos.

Guilherme: Quando cortamos um lado o outro lado fica igual.

Ingrid: Verdade.

Renan: É mesmo! Corta reto aqui... (mostrando para o Guilherme).

Guilherme: Aí... Forma um lado só!

Professora-pesquisadora: E quando um lado é igual ao outro chamamos de...

Ingrid: Simétrico?

Professora-pesquisadora: Isso mesmo, muito bem!

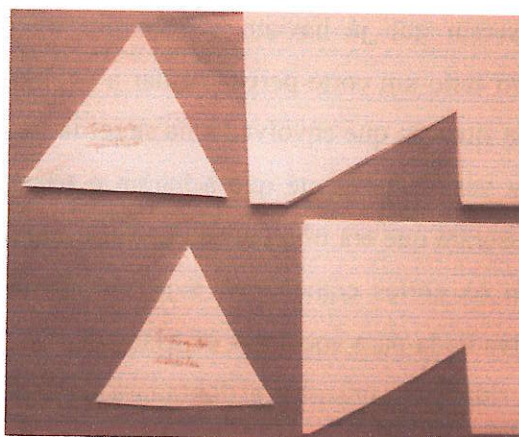


Figura 2 - Cortes de triângulos escalenos na folha com uma dobragem perpendicular a dobradura, encontrando triângulos equiláteros e isósceles.

Já o triângulo escaleno, justificaram que era impossível encontra-lo devido os seus lados serem diferentes, não tendo assim uma relação de simetria. Além disso, relataram que o triângulo escaleno não tinha 90° graus e, portanto, não conseguiam encontra-lo, pois: “Não tem como fazer outro triângulo porque, só tem uma forma, quando abrimos a folha o ângulo de 90° vira só 1 lado e já o outro que não têm o ângulo de 90° fica com dois lados”.

Os alunos tiveram dificuldades para justificar suas descobertas na questão 2, a professora teve que fazer algumas discussões com os alunos que aos poucos foram encontrando maneiras de justificar suas conjecturas. Percebia-se que, os alunos não recordavam muito bem alguns conceitos matemáticos e, além disso, não estavam acostumados em explorar e justificar suas descobertas e por isso, tiveram dificuldades em descrever matematicamente suas conclusões.

Na Parte B – *Mais dobragens e um só corte*, os alunos já estavam interagindo de forma mais ativa e coletivamente discutiam os procedimentos, ensinando uns aos outros. Na primeira questão os alunos estavam animados e curiosos, todos começaram a recortar com a expectativa de encontrar a figura que iriam obter com o corte. Ao recortar a folha com duas dobragens, com cortes inclinados menores que 45° todos do

grupo estavam encontrando um losango, mas continuaram os cortes, pois estavam a procura de um quadrado (Figura 3).

Professora-pesquisadora: Que tipo de figura vocês obtiveram?

Ingrid: Formou um losango!

Professora-pesquisadora: E o quadrado?

Júnior: Não encontramos ainda...

Os alunos estavam fazendo vários cortes de forma curvilínea e retilínea, em folhas com uma e duas dobragens. A professora pesquisadora sentiu a necessidade de chamar a atenção do grupo para que os alunos fizessem esboços dos cortes antes de cortá-los. O grupo continuou com os cortes por alguns minutos, agora com a preocupação de esboça-los e pensar antes de recortarem. Depois de um tempo a Ingrid gritou ao grupo (Figura 3):

Ingrid: Finalmente deu um quadrado!

Professora-pesquisadora: Deu um quadrado?! Ham... Muito bem! Agora vocês devem investigar como conseguiram obter um quadrado.

O grupo mostrou dificuldades em justificar como deveria ser o corte na folha com duas dobras para que o quadrado fosse obtido. Então, a professora realizou uma intervenção, ela mostrou a figura e pediu que eles a observassem e pensassem como poderiam responder à questão.

Júnior: Temos que olhar para o corte!

Professora-pesquisadora: Que tipo de corte foi feito?

Ingrid: Deu um losango...

Professora-pesquisadora: Mas todo quadrado também é um losango, não é mesmo? Então, que tipo de corte vocês fizeram?

Ingrid: Foi um pouco mais reto... Porque se tivesse recortado mais redondo seria um círculo.

Pelas discussões dos alunos, a professora percebeu que os alunos estavam realizando investigações que não os ajudariam a chegar à justificativa possível do corte

feito para obter um quadrado, então fez a seguinte pergunta ao grupo para recapitularem o que haviam feito:

Professora-pesquisadora: Quando vocês fizeram o corte com a inclinação menor vocês encontraram um losango, não foi?

Todos: Sim!

Professora-pesquisadora: E agora com esta inclinação vocês conseguiram um quadrado...

Ingrid: Ai! Me ajudem! (chamando a atenção dos colegas que falavam de outro assunto).

Alguns alunos estavam ficando dispersos, pois ainda continuavam com dificuldades em encontrar a resposta, a professora aproximou pegando no recorte e começou a interrogá-los sobre o que haviam feito, colocando questões que poderiam ser investigadas.

Professora-pesquisadora: Quando a Ingrid recortou aqui (mostrando com a figura ainda dobrada) com uma inclinação mais alta da que vocês estavam recortando, ela conseguiu encontrar um quadrado. Como ela conseguiu obter esse quadrado?

Júnior: É um ângulo...

Ingrid: Um ângulo de 90° ? (olhando para a inclinação do corte)

Guilherme: Fez um ângulo de 90° !

Professora-pesquisadora: Vocês têm certeza que é um ângulo de 90° ?

Guilherme: Temos!

Ingrid: Já eu não tenho certeza...

Guilherme: Esse não foi deitado, assim oh... (mostrando o recorte de um triângulo escaleno)

Professora-pesquisadora: Aqui... é um ângulo de 90° ?

Renan: Não! É não, eu esqueci... é um ângulo de 50° , não?

Professora-pesquisadora: De 50° ? Vocês também acham que é de 50° ? (solicitando a opinião dos outros alunos)

Júnior: É 70° !

Renan: Não, não! Esse é de 30° ! (olhando para os colegas para verem se tinham a mesma conclusão)

Enquanto discutiam, o Júnior explicava ao grupo sobre a soma de dois ângulos retos, na qual daria 180° . Os alunos sabiam que para achar o quadrado havia uma relação com o ângulo, então retornaram a discutirem sobre o valor do ângulo que poderia ter a inclinação.

Guilherme: 90° mais 90° é...

Júnior: É 180° !

Guilherme: O ângulo seria 90° não é não?

Renan: Não! (mostrando com o dedo que o ângulo de 90° era reto)

Ingrid: É 60° ...

Guilherme: Não, está menos inclinado.

Nessa discussão, percebe-se que o Guilherme lembrou como era a inclinação do ângulo de 90° com a explicação do colega Renan e aplicou-a na observação da inclinação da figura. Houve uma troca de conhecimentos que contribuiu para o entendimento de todo o grupo onde, perceberam que o corte seria menor do que eles estavam propondo anteriormente.

Júnior: Então deve ser 55° ou 50° ...

Professora-pesquisadora: Vocês falaram que se o corte for reto então seria de 90° graus. Mas e aqui, qual foi o ângulo?

Júnior: Foi 20° !

Ingrid: Está no meio! (mostrando o corte para os colegas)

Guilherme: Então é 50° !

Júnior: Lógico que não... Se está no meio então é 90° dividido por 2... Dá 45° !

Ingrid: Verdade! Tem de ser um corte de 45° para achar um quadrado.

Professora-pesquisadora: E se vocês fizerem cortes com outros ângulos?

Todos: Não vamos achar um quadrado!

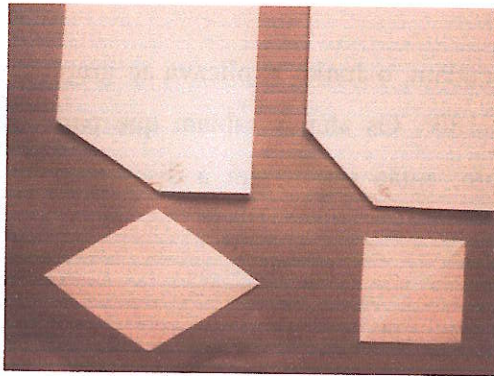


Figura 3 - Cortes feitos com duas dobragens, uma com ângulo diferente de 45° e outra com ângulo de 45° , obtendo respectivamente um losango e um quadrado.

Há essa altura do desenvolvimento da atividade os alunos já interagiam muito mais e tinham a preocupação de discutirem a conclusão de cada colega, fazendo perguntas e pedindo opinião sobre suas descobertas. Eles explicavam uns aos outros o porquê de pensarem que aquela poderia ser uma justificativa e perguntavam aos colegas do grupo: “Vocês concordam?”. Dessa forma, era visível o interesse pela atividade, pois mostravam através do esforço e ações entusiasmadas um posicionamento responsável perante a atividade e um ‘novo olhar’ de curiosidade e interesse pela disciplina.

Na questão 2 os alunos começaram a fazer vários cortes, porém o Renan preferiu fazer cortes a partir de traços de um triângulo retângulo e ângulos internos iguais a 45° , conseguindo obter um quadrado. Os outros integrantes encontraram figuras de 8 lados (Figura 4).

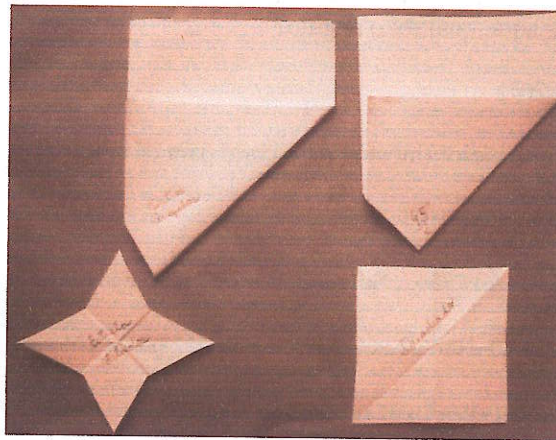


Figura 4 - Cortes feitos com três dobragens com ângulos igual e maior que 45° , obtendo figuras de quatro e oito lados.

Durante o preenchimento do quadro da questão 4, os alunos começaram a pegar as figuras que haviam sido encontradas anteriormente observando os seus lados e preencheram a tabela.

Professora-pesquisadora: Com nenhuma dobragem, vocês conseguiram obter alguma figura?

Todos: Não!

Professora-pesquisadora: E com duas dobragens? Qual o número máximo de lados vocês obtiveram fazendo apenas um corte?

Guilherme: 4! E com 3... (recortando novamente para confirmar).

Renan: 8! (fazendo o corte e confirmando com o Guilherme que havia recortado).

Júnior: Com 4 dobragens será 16 lados...

Guilherme: (dobrando a folha para recortar) Nossa... Tá ficando difícil para dobrar!

Renan: Vai quebrar a tesoura... (sorrindo).

Guilherme: É 16! (logo após ter contado os lados da figura).

O aluno Júnior já havia entendido a regularidade, por isso, a professora continuou a perguntar para que ele compartilhasse com os outros colegas.

Professora-pesquisadora: E com 5 dobragens?

Júnior: Não precisa nem recortar!

Ingrid: Acho que vai ser 24.

Professora-pesquisadora: Por quê?

Ingrid: Porque vai aumentando...

Professora-pesquisadora: Analisem os resultados na tabela.

Renan: Tá aumentando de 12... 28...

Ingrid: Tá aumentando de 2 em 2, tá contando o número duas vezes.

Júnior: Deu 4 aumentou mais 4, deu 8 aumentou mais 8, deu 16 aumentou mais...

Todos: Vai ser 32!

Júnior: Não precisa nem recortar... Está dobrando o valor.

Professora-pesquisadora: E se ter 6 dobragens?

Renan: Vai dar... 64!

Guilherme: Daí por diante...

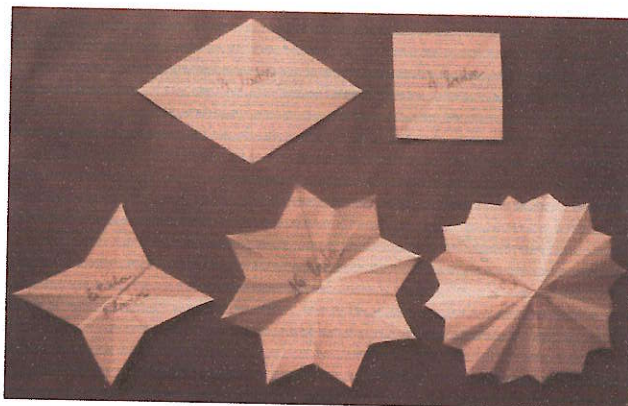


Figura 5 - Figuras obtidas com duas, três, quatro e cinco dobragens, obtendo figuras de 4, 8, 16 e 32 lados, respectivamente.

Os alunos conseguiram entender a relação ente o número de dobragens e o total de lados que teriam as figuras. Quando perguntados sobre uma regra geral, na qual poderiam generalizar a relação que haviam encontrado, houve grande dúvida por parte do grupo. Os alunos sabiam que os valores estavam dobrando, porém não conseguiam generalizar através de uma lei matemática. Então, com os questionamentos da professora os alunos animaram e começaram a pesquisar, mas mesmo assim a dúvida persistiu. A professora pesquisadora decidiu então escrever no quadro os valores que haviam encontrado na tabela e pediu aos alunos para discutirem os valores envolvendo-se no raciocínio deles, moderando o comportamento do grupo perante a atividade através de perguntas. Os alunos começaram a discutir a reescrita dos números que representavam os lados, avaliando caso a caso, depois de um tempo com a intervenção da professora pesquisadora os alunos conseguiram visualizar que o número máximo de lados da figura que se pode obter fazendo-se apenas um corte era uma potência de 2, ou seja, n dobragens, obtendo 2^n como número máximo de lados.

Depois do término da atividade, percebia-se o entusiasmo dos alunos, algo interessante que chamou a atenção da professora pesquisadora, já que achava que os alunos estariam exaustos mentalmente depois de desenvolverem a atividade. Mostravam interesse pela abordagem de atividade investigativa mesmo não tendo nenhuma experiência prévia com esse tipo de atividade, em que a compreensão ia sendo construída à medida que iam se esforçando e compartilhando uns com os outros as

descobertas, questionando ou explicando suas ideias, contribuindo assim para a construção do conhecimento um dos outros. Nessa perspectiva, mais uma vez, notou-se claramente as potencialidades da atividade investigativa para o envolvimento dos alunos e conseqüentemente para o interesse pela Matemática.

Durante a atividade, os alunos buscaram estratégias, fizeram experimentações e procuraram responder de forma concreta suas justificativas, buscando legitimar os resultados dentro de suas limitações, pois deve-se atentar ao fato deste tipo de atividade em que é exigido do aluno “pensar matematicamente” para que seja provado ou que seja encontrado regularidades em algum problema não é uma atividade em que os alunos estão habituados. Nesse sentido, a professora pesquisadora teve que realizar intervenções em alguns momentos para que os alunos não se dispersassem daquilo que foi proposto na atividade e ao mesmo tempo incentivá-los a “pensar matematicamente”.

É claro que o professor continua a ter de apresentar, aos alunos, informações sobre os conceitos, procedimentos e notações matemáticas. No entanto, em vez de isso ser feito de forma abrupta e descontextualizada, pode ser feita como refere Lampert, à medida que se ensina os alunos como fazer Matemática, integrando, quando a propósito, algumas informações sobre ferramentas e convenções matemáticas (PONTE et. al., 1998, p. 8).

O ato de mostrar aos alunos a importância de olhar para as possibilidades matemáticas de forma interrogativa, verificando as questões a serem investigadas o professor passa a exercer no raciocínio matemático do aluno uma grande influência que também contribui para o modo de eles relacionarem com o mundo. Para tanto, estas ações contribuem para o bom gerenciamento da situação didática, onde tem-se a preocupação por parte do professor em garantir que todos os alunos participem da atividade e vejam valorizados as suas descobertas (PONTE et. al., 1998).

No momento da coleta dos dados que se deu durante todo o desenvolvimento da implementação da atividade na escola, os alunos se sentiram confortáveis mesmo com a presença das câmeras, observações e anotações da professora pesquisadora que ao mesmo tempo participava atendendo-os quando solicitada ou quando percebia que era conveniente.

Durante a análise dos dados coletados das gravações, registros fotográficos (Anexos), registros escritos dos alunos e da professora pesquisadora, teve-se a

preocupação em analisar visando uma reflexão crítica, observações e conclusões de todos os momentos vivenciados e dos materiais produzidos.

Após a aplicação da atividade e análise dos momentos vividos, foi possível identificar, diante da participação dos alunos e do envolvimento dos mesmos com a atividade proposta, algumas potencialidades referentes a implementação de atividades de investigação matemática em sala de aula. Destacaram as seguintes potencialidades durante e após o desenvolvimento da atividade através da análise dos dados:

- Estímulo ao raciocínio e a aprendizagem individualmente e em grupo;
- Discussão e questionamento de forma crítica nas conclusões obtidas, de forma a encontrar respostas e justifica-las com mais tenacidade;
- Preocupação e esforço na forma de justificar, demonstrar suas descobertas;
- Ajuda coletiva e colaboração entre os alunos;
- Exploração de situações matemáticas, colaborando para o espírito investigativo do aluno;
- Observação plana e espacial das figuras;
- Generalização dos resultados;
- Curiosidade e interesse pelo assunto abordado;
- Participação e envolvimento dos alunos na atividade proposta.

Portanto, a partir das potencialidades apresentadas, obteve-se um resultado satisfatório com a aplicação da atividade *Dobragens e Cortes* com a utilização da investigação matemática como uma metodologia. Durante a realização da atividade foi possível identificar que essa metodologia enriqueceu o processo de aprendizagem dos alunos, na qual, expressaram interesse, esforço, coletividade, observação, participação e grande curiosidade pela Matemática, recortavam incansavelmente, observavam atentamente as figuras e se esforçavam a relatarem suas descobertas. Perguntavam que dia poderiam voltar, pois queriam continuar fazendo atividades de investigação. O aluno Guilherme, depois do fim da atividade disse: “Me senti como um cientista”.

5 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo identificar as potencialidades das investigações matemáticas enquanto uma metodologia no ensino e aprendizagem de Matemática

através de uma implementação de atividade investigativa de Geometria aplicada em um grupo de 4 (quatro) alunos de uma turma do 9º ano de uma escola pública. Apesar das dificuldades iniciais devido à ausência de experiências com esse tipo de atividade, os alunos mostraram interesse, esforço e participação coletiva o que incentivou o grupo durante a realização da atividade. No decorrer do processo, desenvolveram capacidades de raciocinar matematicamente, exploraram situações matemáticas e demonstraram suas conjecturas através de justificativas e ilustrações. Os alunos mostraram-se curiosos e desafiados com a atividade e, quanto mais desenvolvia a atividade mais participativos ficavam, passando a valorizar a Matemática, tendo um posicionamento de exploração e investigação diante de um problema ou situação matemática.

Todos os alunos compreenderam a dinâmica da atividade investigativa, porém não investigaram aspectos mais profundos da atividade, o que é aceitável, considerando-se que os alunos estavam pela primeira vez realizando uma atividade investigativa, com uma realidade totalmente diferente das atividades que estavam habituados. Os alunos tiveram dúvidas e dificuldade em como demonstrar ou descrever o processo que haviam feito, relatando que entendiam o que fizeram, porém não sabiam explicar de forma mais concreta, o que é natural, pois a demonstração requer muitas vezes uma maturidade matemática que talvez os alunos não adquiriram ainda naquele grau de escolaridade.

Os alunos tinham níveis de desempenho similares, o que de certa forma incentivaram a explorarem com tranquilidade e praticamente no mesmo ritmo. A professora pesquisadora pôde oferecer uma atenção mais ativa durante a atividade, porém, em se tratando de uma sala de aula a atenção aos grupos seria menor. Para melhorar o desempenho dos alunos e promover uma maior autonomia do grupo é importante trabalhar de forma continuada e diversificada, para que os alunos entendam melhor a ideia de investigar e demonstrar matematicamente suas conjecturas.

Este trabalho responde a pergunta de pesquisa, apresentando as potencialidades da investigação matemática como uma metodologia capaz de promover: estímulo ao raciocínio e a aprendizagem; discussão e questionamento de forma crítica nas conclusões obtidas, de forma a encontrar respostas e justificá-las com mais tenacidade; preocupação e esforço na forma de justificar, demonstrar suas descobertas; ajuda coletiva e colaboração entre os alunos; exploração de situações matemáticas, colaborando para o espírito investigativo do aluno; observação plana e espacial das figuras; generalização dos resultados; despertar de curiosidade e interesse pelo assunto abordado, participação e envolvimento dos alunos na atividade proposta. Para um

melhor aproveitamento da atividade pelos alunos e também para o professor é importante experiências continuadas e reflexivas, de preferência com grupos menores de alunos, pois assim como qualquer metodologia, a investigação matemática precisa ser constantemente trabalhada e habituada para se ter, um melhor desenvolvimento e aproveitamento por todos.

Referências

- ABRANTES, P. *Investigações em Geometria na Sala de Aula*. Texto publicado no livro de E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da Geometria no Virar do Milênio*, Lisboa: DEFCUL, 1999.
- FERREIRA, Adriana Assis. *A produção de significados matemáticos em um contexto de aulas exploratório-investigativas*. 2012. 250 p. Tese (Doutorando) – Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação – UFMG/FaE, Belo Horizonte, 2012.
- LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo, EPU, 1996.
- PASSOS, C. L. B.; LAMONATO, M.; PITON-GONÇALVES, J. . *Investigações Geométricas: reflexões sobre aprendizagens compartilhadas em um grupo*. In: VIII EPEM – Encontro Paulista de Educação Matemática, 2006, São Paulo. Anais do VIII EPEM.
- PONTE, J. P. *Investigar, ensinar e aprender*. Lisboa: *Actas do profMat2003* (APM), p.25-39, 2003.
- PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. *As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática*. Lisboa: *Actas do ProfMat99* (APM), p.91-101, 1999.
- PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. *O trabalho do professor numa aula de investigação matemática*. *Quadrante*, 7(2), p. 41-70, 1998.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica, 2006.
- ROCHA, A; PONTE, J. P. *Aprender matemática investigando*. *ZETETIKÉ*, v.14, n. 26, p. 29-54, 2006.

